数列

数列の基本

●等差数列

初項 a，公差を d とすると，第 n 項 a_n は

$a_n=a+(n-1)d$ で表される。また，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ となる。

もし，初項 a，末項 l，項数 n が分かっている場合は，

$S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$ で簡単に求められる。

※これらの式は全く同じことを表している。初項が a なのだから，末項（第 n 項）は $a+(n-1)d$ になる。これを $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$ に代入すると

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ が求められる。

●等比数列

初項 a，公比 r とすると，第 n 項 a_n は

$a_n=a\cdot r^{n-1}$ と表せる。また，初項から第 n 項までの和 S_n は，

$S_n=a\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r}=a\cdot\dfrac{r^n-1}{r-1}$ となる。

例） a_1, a_2, a_3, a_4 がこの順序で等比数列であり， $a_1+a_4=27, a_2+a_3=18$ であるとき，この等比数列を求めよ。

等比数列は初項と公比さえ分かれば $a_n=ar^{n-1}$ で表せる。

$\therefore a_1=a, a_2=ar, a_3=ar^2, a_4=ar^3$　これを条件に当てはめて，

made with OpenOffice.org

(c)2002 YSK http://yaw.jp/

$\begin{cases} a+ar^3=27 \\ ar+ar^2=18 \end{cases}$ $a\neq 1, |r|\neq 1$ なので，辺々割って，

$\dfrac{a(1+r^3)}{ar(1+r)}=\dfrac{27}{18} \Leftrightarrow \dfrac{a(1+r)(1-r-r^2)}{ar(1+r)}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-r+r^2}{r}=\dfrac{3}{2}$

$2(1-r+r^2)=3r$

$(r-2)(2r-1)=0 \quad r=2, \dfrac{1}{2}$

$r=2$ のとき $a=3$，その時数列は 3, 6, 12, 24

$r=\dfrac{1}{2}$ のとき $a=24$，その時数列は 24, 12, 6, 3

● Σ（シグマ）の意味

シグマは和の公式を表している。$\sum_{k=1}^{n} a_k$ とは，k に 1 から n までを代入し，それらを足すという意味。つまり，

$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ということである。また，

$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k$ （c は定数）

$\sum_{k=1}^{n} (a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k\pm\sum_{k=1}^{n} b_k$

となる。そして，具体例として覚えておくべきなのは，

$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ （自然数の和）

$\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ （平方数の和）

たまに出てくるものとして，

$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ （立方数の和）

made with OpenOffice.org

間違いやすいものとして，

$\sum_{k=1}^{n} c = c+c+c+\cdots+c = nc$ （cは定数）　※ $\sum_{k=1}^{n} c = c$ ではない。

がある。

※ここで，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ は $k=1$ から n までであったが，$k=1$ から $(n-1)$ までのような例 $\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)$ も出てくる。この場合も別の式を覚えるような必要はなく，

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ のときの式の n を $(n-1)$ に置き換えるだけである。つまり

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = 1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)\{(n-1)+1\}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$ などとなる。

（例１）奇数の数列 $a_n = 2n-1$ の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{2\cdot n(n+1)}{2} - n = n^2$$

（例２）奇数の平方数の数列 $a_n = (2n-1)^2$ の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{4n^3-n}{3}\left(= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}\right)$$

※最後は展開した形でも，カッコ内のようにまとめた形でも可。

made with OpenOffice.org

（例３） $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)$ を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

ここで，無理矢理全部展開しても答えは出るが，

$=\dfrac{\{n(n+1)\}^2}{4}+\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{4}+\dfrac{4n(n+1)}{4}$ と変形すると， $\dfrac{n(n+1)}{4}$ でくくって以下のように計算できる。

$$=\frac{n(n+1)}{4}\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}=\frac{n(n+1)}{4}\cdot(n^2+5n+6)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

●階差数列

階差とは，ある数列の隣接する二項の差。階差数列とは，もとの数列を見ても法則性がよく分からないが，階差については分かるようなもの。

要するに，もともとの数列が等差数列でも等比数列でもないような場合に考えるものである。

求める数列を a_n として，階差数列を b_n とすると，

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ （$n\geq2$） ※ $n=1$ のときは別に確かめる

である。

（例） $a_n=2, 9, 22, 41, 66, 97, 134\cdots$ の一般項 a_n を求めよ。

まず，階差数列 b_n をとると， $b_n=7, 13, 19, 25, 31, 37\cdots$ となり，初項7，公比6の等差数列と分かる。

$\therefore b_n=7+6(n-1)=6n+1$ なので，公式より

made with OpenOffice.org

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+1)=2+6\cdot\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$$
$$=3n^2-2n+1 \quad (n\geq 2)$$

また，この式は $n=1$ のとき $a_1=2$ となり成立する。

$\therefore\ a_n=3n^2-2n+1 \quad (n\in\mathbb{N})$

※ Σ の上が $n-1$ の意味

例えば a_4 を考えた場合， $a_4=a_1+b_1+b_2+b_3=a_1+\sum_{k=1}^{3} b_k$ になる。同様に $a_5=a_1+\sum_{k=1}^{4} b_k$ となり， $a_6=a_1+\sum_{k=1}^{5} b_k$ となる。つまり，階差の項数はもともとの数列の項数より 1 少なくなるので， a_n を求めるには a_1 に b_1 から b_{n-1} までの和を足すことになる。

特殊な求め方をするもの

● S_n から a_n を求める方法

S_n から a_n を求める場合には， $n\geq 2$ のとき $S_n-S_{n-1}=a_n$ であることを利用する。このとき，階差数列と同様， $n=1$ のときは $S_1=a_1$ から別に確かめなければならない。また， S_{n-1} は S_n の式の n を $(n-1)$ に置き換えたものになる。

（例） $S_n=n^2+n$ である数列の一般項 a_n を求めよ。

$n\geq 2$ のとき， $S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n$ （ $n\geq 1$ としてしまうと， $n=1$ のとき $S_{n-1}=S_0$ となり，意味がない。）

$a_n=S_n-S_{n-1}$ より， $a_n=n^2+n-(n^2-n)=2n \quad (n\geq 2)$

$n=1$ のとき， $a_1=2, S_1=2$ であるので，

$a_n=2n \quad (n\in\mathbb{N})$

made with OpenOffice.org

●分母が積になっている分数の数列の和

これは，特有の変形を加えて素直に足していく。

（例） $\frac{1}{2\cdot5}, \frac{1}{5\cdot8}, \frac{1}{8\cdot11}, \frac{1}{11\cdot14}, \cdots$ の和 S_n を求めよ。

まず，この数列の一般項 a_n を考える。

$$\begin{cases} \text{分母の左側の数字だけを見ると，初項2，公差3の等差数列} \\ \text{分母の右側の数字だけを見ると，初項5，公差3の等差数列} \end{cases}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

これを，$\alpha\left\{\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right\}$ の形に変形させる。

$a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\alpha\left\{\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right\}$ とすると，

$=\alpha\left\{\frac{(3n+2)-(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)}\right\}=3\alpha\left\{\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right\}$ 係数比較して $\alpha=\frac{1}{3}$

$\therefore a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$ これを元に考えると，

$S_n=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$ となり，始めの $\frac{1}{2}$ と

最後の $\frac{1}{3n+2}$ 以外は隣同士で消える。

$$\therefore S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}$$

made with OpenOffice.org

● $S-rS$ とするもの

等比数列を等差数列を掛け合わせたような，等比数列っぽいけれども少し違うものに使う（我ながらなんつー説明だ… ）。例を見た方が分かりやすいだろう。

（例） $1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N},\ |r|\neq 1)$ を求めよ。

r について見ると等比数列のようになっているので， $S-rS$ をやってみる。

$$\begin{array}{rl} S= & 1+2r+3r^2+\cdots\cdots\cdots+(n-1)r^{n-2}+\qquad nr^{n-1} \\ -)\,rS= & \qquad r+2r^2+3r^3+\cdots+(n-2)r^{n-2}+(n-1)r^{n-1}+nr^n \\ \hline S-rS= & 1+\ r+\ r^2+\ r^3+\cdots+\qquad r^{n-2}+\qquad r^{n-1}-nr^n \end{array}$$

となり，右辺は最後の nr^n を除けば初項 *1*，公比 r の等比数列となる。そこで，等比数列の部分については等比数列の和の公式を用いて書き直すと，

$(1-r)S=\dfrac{1-r^n}{1-r}-nr^n$ 　両辺を $(1-r)$ で割って，

$S=\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}-\dfrac{nr^n}{1-r}$ ここで終わってもいいし，さらに続けて

$=\dfrac{1-r^n-(1-r)nr^n}{(1-r)^2}=\dfrac{1-r^n-nr^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}=\dfrac{1-(1+n)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$ としてもよい。

●群数列

まともに例題を書いていくとキリがないのでこれについては簡単にコツだけ。

基本的に第 n 群に項が n 個入るようにして，各群の先頭や最後に着目する（各群の特定の項だけ抜き出すと等差数列や等比数列になっていることが多い）。

また，各群の項数に着目する場合もある。

（分け方の例）

$\begin{cases} 1|2,2|3,3,3|4,4,4,4|5,\cdots \\ 1|1,2|1,2,3|1,2,3,4|1,2,3,\cdots \end{cases}$ 第 n 群に項が n 個入るよう区切る

$1|3,3,3|5,5,5,5,5|7,7,7,7,7,7,7|9,9,9,\cdots$ 第 n 群に項が $(2n-1)$ 個入るよう区切る

made with OpenOffice.org