漸化式

漸化式の基本

● $a_{n+1}=a_n+d$ タイプ

これは，等差数列のこと。

（例） $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2$ （$n\in\mathbb{N}$）の一般項 a_n を求めよ。

実際に書き出してみると， $a_n=3,5,7,9,11,13\cdots$ となり，初項が 3，公差が 2 の等差数列と分かる。

また，与式を変形して $a_{n+1}-a_n=2$ としても隣り合う項の差が 2，つまり公差が 2 と分かる。

以上より，一般項は

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$

● $a_{n+1}=pa_n$ タイプ

これは，等比数列のこと。

（例） $a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n$ （$n\in\mathbb{N}$）の一般項 a_n を求めよ。

この式の意味を考えれば，初項が 2，次の項に進むには 3 倍する（＝公比が 3）ということだと分かる。これを式にして，一般項は

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

● $a_{n+1}=a_n+f(n)$ タイプ

これは， $a_{n+1}=a_n+d$ と似ているが，こちらは階差数列の式になる。

（例 1） $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n+1$ （$n\in\mathbb{N}$）の一般項 a_n を求めよ。

これも隣り合う項の差を考えてみると，

$a_{n+1}-a_n=2n+1$ となる。

つまり，公差ではなく，階差が分かる。

実際に a_n を列記し，階差を b_n とすると，

$a_n=3,6,11,18,27\cdots$
$b_n=3,5,7,9,\cdots(2n+1)$

となり， $b_n=2n+1$ ということである。

以上より，階差数列の解き方に従い

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2n+1)=3+\sum_{k=1}^{n-1}2n+\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=3+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$$
$$=n^2+2$$

（例 2） $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$ （$n\in\mathbb{N}$）の一般項 a_n を求めよ。

これも階差の式が 2^n となっているだけで，特にやり方は例 1 と変わらない。

$a_n=1,3,7,15,31,63$
$b_n=2,4,8,16,32,\cdots 2^n$

上のように書き出しても分かるとおり，階差 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ である。階差数列の解き方に従って，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^n$$
$$=1+2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2}-1=1+2^n-1-1=2^n-1$$

● $a_{n+1}=pa_n+q$ タイプ

これは数列をいじって等比数列の形に持ち込む。基本的に漸化式の複雑なタイプは等比数列に持ち込むという流れをとる。

（例） $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ （$n\in\mathbb{N}$）の一般項 a_n を求めよ。

まず， a_{n+1} と a_n を α とおいた形の式を，与式から引く。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=2a_n+1 \\ -) & \alpha=2\alpha+1 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)\cdots(1) \end{array}$$

ここで， $\alpha=2\alpha+1$ を解いて， $\alpha=-1$ なので，これを(1)の式に代入して

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ と与式を変形できる。ここで， $a_n+1=b_n\cdots(2)$ とおくと，

$b_1=a_1+1=2$，$b_{n+1}=2b_n$ という式が得られる。つまり， b_n は初項 2，公比 2 の等比数列ということになる。

※これはどういう意味かというと，

$a_n=1,3,7,15,31\cdots$ であり，

$a_n+1=2,4,8,16,32\cdots$ である。 a_n の数列を見ていてもなんだかよく分からないが，

a_n+1 の数列にすると，初項が 2，公比 2 の等比数列と分かる。そして，考えやすくするため(2)で $a_n+1=b_n$ と置き換えている。（慣れたらこの置き換えはする必要はない）

以上より，

$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ となるので，これを(2)の式に代入して， a_n について解くと

$a_n+1=2^n$

$a_n=2^n-1$

漸化式の応用

●3 項間漸化式 $(a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n)$

これは $a_{n+2}-pa_{n+1}-qa_n=0$ をもとにした式： $x^2-px-q=0$ を解き，その解 α,β を用い，

$$\begin{cases} a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \\ a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$ と 2 式に変形する。

そしてこれらをそれぞれ等比数列として解き，最後に連立させて解く。

（例） $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ の一般項 a_n を求めよ。

$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n \Leftrightarrow a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ を元にした $x^2-5x+6=0$ を解く。

$(x-2)(x-3)=0$ より $x=2,3$

これを利用して $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ は

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)\cdots(1) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)\cdots(2) \end{cases}$$ と変形できる。

(1)について， $a_{n+1}-2a_{n+1}=b_n$ とおくと， $a_{n+2}-2a_{n+2}=b_{n+1}$ であり，

$b_{n+1}=3b_n$ $(b_1=a_2-2a_1=1)$ なので，

$b_n=a_{n+1}-2a_n=1\cdot 3^{n-1}\cdots(3)$

(2)についても同様に $a_{n+1}-3a_{n+1}=c_n$ とおいて考え。

$c_n=a_{n+1}-3a_n=1\cdot 2^{n-1}\cdots(4)$

(3)から(4)を引いて,

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}-2a_n=3^{n-1} \\ -) & a_{n+1}-3a_n=2^{n-1} \\ \hline & a_n=3^{n-1}-2^{n-1} \end{array}$$

●分数型

分数型の場合，一度逆数にして考え，最後にまた逆数をとって答えを出す。

（例） $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$ $(n\in\mathbb{N})$ の一般項 a_n を求めよ。

まず， $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$ の逆数をとって,

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}=1+\frac{2}{a_n}$$

$\dfrac{1}{a_n}$ とすると， $\dfrac{1}{a_{n+1}}=b_{n+1}$ なので,

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=1+\dfrac{2}{a_n}$ は $b_{n+1}=1+2b_n$ と変形でき， $b_1=\dfrac{1}{a_1}+1=2$ である。

$a_{n+1}=pa_n+q$ のタイプの解き方に従って,

$$\begin{array}{rl} & b_{n+1}=2b_n+1 \\ -) & \alpha=2\alpha+1 \\ \hline & b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha) \end{array}$$

$\alpha=-1$ を代入して， $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$ なので,

$b_n+1=2\cdot s^{n-1}=2^n$

移項して $b_n=2^n-1=\dfrac{1}{a_n}$

これを逆数にして $a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$

● S_n を含む漸化式

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ を利用して， $a_{n+1}=pa_n+q$ の形に変形する。また， $S_1=a_1$ を用いて a_1 も出す。

（例） $5a_n=3S_n+3n+2$ （$n\in\mathbb{N}$）の一般項 a_n を求めよ。

まず $n=1$ を代入して，

$$5a_1=3S_1+3+2=3a_1+5$$
$$2a_1=5$$
$$a_1=\frac{5}{2}$$

次に，n に n+1 を代入したものから与式を引く。

$$\begin{array}{rl} & 5a_{n+1}=3S_{n+1}+3(n+1)+2 \\ -) & 5a_n=3S_n+3n+2 \\ \hline & 5(a_{n+1}-a_n)=3a_{n+1}+3 \\ & \Leftrightarrow 2a_{n+1}=5a_n+3 \end{array}$$

あとは $a_{n+1}=pa_n+q$ のタイプの解き方に従って，一般項を求める。

$$\begin{array}{rl} & 2a_{n+1}=5a_n+3 \\ -) & 2\alpha=5\alpha+3 \\ \hline & 2(a_{n+1}-\alpha)=5(a_n-\alpha) \end{array}$$

$\alpha=-1$ を代入して， $2(a_{n+1}+1)=5(a_n+1)$

$a_n+1=\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ 移行して

$$a_n=\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1$$

(c)2002 YSK http://yaw.milkcafe.to/